Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas II (MA1112)
1^{er} Examen Parcial (26 %)
Ene-Mar 2018

Turno 5-6
Duración: 1 hora 50 minutos

Respuestas

Pregunta 1. Sea $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{, si } -2 \le x < 0 \\ (x-2)^2 & \text{, si } 0 \le x \le 2 \end{cases}$

a. (4 ptos.) Halle la suma de Riemann de la función $f(x)$ para la partición $\mathcal{P} = \{-2, -3/2, 0, 1/2, 2\}$ del intervalo $[-2,2]$ y los puntos muestra definidos como el punto medio de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$

b. (8 ptos.) Determine $\int_0^2 (x-2)^2 \, \mathrm{d}x$ mediante sumas de Riemann empleando una partición uniforme.

Solución:

a) Los puntos muestra son $\{-7/4, -3/4, 1/4, 5/4\}$. Luego, la suma de Riemann correspondiente es,

$$\sum_{i=1}^{4} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i = f(-7/4)\,1/2 + f(-3/4)\,3/2 + f(1/4)\,1/2 + f(5/4)\,3/2 = 67/8$$

b) Considerando una partición uniforme del intervalo $[0,2]$, tenemos que $\Delta x_i = 2/n$ y $x_i = \frac{2}{n} i$ con $i \in \{0, \ldots, n\}$. Podemos tomar como punto muestra el extremo de la derecha en cada subintervalo; así, $\bar{x}_i = x_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Luego, la suma de Riemann correspondiente es,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2}{n} i\right) \frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{n} i - 2\right)^2 \frac{2}{n} \\
&= \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{16}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i + \frac{8}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{16}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{8}{n} n \\
&= \frac{4}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) - 8\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 8
\end{aligned}$$

Como la partición es uniforme, hacer su norma tender a cero es equivalente a hacer el número de subintervalos tender a infinito. Entonces,

$$\begin{aligned}\lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\bar{x}_i\right)\Delta x_i &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\bar{x}_i\right)\Delta x_i \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)-8\left(1+\frac{1}{n}\right)+8\right) = 8/3\end{aligned}$$

y, dado que el límite existe, se tiene que $\displaystyle\int_0^2 (x-2)^2\,\mathrm{d}x = 8/3$.

Pregunta 2. (4 ptos. c/u) Resuelva las integrales

a) $\displaystyle\int \frac{\cos\left(\sqrt[3]{1-3x}\right)}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^2\left(\arccos(x)\right)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Solución:

$$\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{1-3x} \\ \mathrm{d}u &= \frac{-1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos\left(\sqrt[3]{1-3x}\right)}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}\,\mathrm{d}x \overset{\downarrow}{=} -\int \cos(u)\,\mathrm{d}u &= -\operatorname{sen}(u)+C \\ &= -\operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{1-3x}\right)+C\end{aligned}$$

$$\operatorname{sen}^2\left(\arccos(x)\right) = 1-\cos^2\left(\arccos(x)\right) = 1-x^2$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^2\left(\arccos(x)\right)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \overset{\downarrow}{=} \int_0^1 \frac{1-x^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(x^{-1/2}-x^{3/2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \left(2x^{1/2}-\frac{2}{5}x^{5/2}\right)\Bigg|_0^1 = 2-2/5 = 8/5\end{aligned}$$

Pregunta 3. (2 ptos.) Determine el intervalo para que la función

$$f(x) = 3x^4 - \int_0^x \left(8t^3-3t^2+6t\right)\mathrm{d}t$$

sea cóncava hacia abajo.

Solución: El Teorema Fundamental del Cálculo establece que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \left(8t^3 - 3t^2 + 6t\right)\mathrm{d}t = 8x^3 - 3x^2 + 6x$$

por lo que $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x$ y $f''(x) = 6(x+1)(2x-1)$. Así, la función es cóncava hacia abajo en el intervalo $\left[-1, \tfrac{1}{2}\right]$ ya que $f''(x) < 0$ si, y sólo si, $x \in \left(-1, \tfrac{1}{2}\right)$ y su dominio es todo $\mathbb{R}$.

Pregunta 4. (4 ptos.) Considere la función $f(x) = 4 - x^2$ definida en el intervalo $[0, b]$, $b > 0$. Determine el valor de b de manera que el valor promedio de la función f en $[0, b]$ sea igual a 2.

Solución: El valor promedio de la función $f(x) = 4 - x^2$ sobre el intervalo $[0, b]$ viene dado por

$$\frac{1}{b-0}\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b}\int_0^b \left(4 - x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{b}\left(4x - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^b = 4 - \frac{b^2}{3}$$

y es igual a 2 si, y sólo si, b vale $\sqrt{6}$ $\left(\text{como } b > 0 \text{ entonces } b^2 = 6\right.$ sólo admite la solución $\left.b = \sqrt{6}\right)$.